TEMPERUOTO DERINIMO MATEMATIKA

GEOMETRINĖ PROGRESIJA IR LOGARITMAI MUZIKOJE

Temperuotas muzikinis garsiaeilis (dar yra natūralusis akustinis muzikinis garsiaeilis) – tai garsų dažnumų seka, kurioje bet kurio 13–tojo nario dažnumas yra 2 kartus aukštesnis už pirmojo (kurį sekos narį laikyti pirmuoju – laisvas pasirinkimas), o visi gretimų sekos narių dažnumų santykiai yra lygūs [2]. Dvylika iš eilės einančių bet kurių sekos narių grupė sudaro oktavą.

Dauguma muzikos instrumentų (fortepijonas, vargonai) yra derinami pagal temperuotą garsiaeilį, tačiau dalis jų tebėra natūralaus akustinio derinimo (smuikas, violončelė, visi pučiamieji) [1]

Temperuotas derinimas galutinai įsigalėjo nuo J. S. Bacho (1685–1750) laikų [1].

Klavišiniais muzikos instrumentais (fortepijonas, vargonai) temperuotas garsiaeilis yra išgaunamas klaviatūros klavišais (baltais ir juodais). Klavišai sugrupuoti oktavomis. Vieną oktavą sudaro 12 klavišų: 7 pagrindiniai (baltieji) ir 5 tarpiniai (juodieji). Klaviatūroje klavišai išdėstyti tokia tvarka, kad, spaudžiant juos paeiliui iš kairės į dešinę, girdimi palaipsniui vis aukštesni garsai. Garso aukštumas apibūdinamas stygos virpesių dažnumu, t.y. stygos virpesių skaičiumi per sekundę. Virpesių dažnumo matavimo vienetas - hercas (Hz).

Nustatykime ryšį tarp **klaviatūros klavišo eilės numerio ir tuo klavišu išgaunamo garso dažnumo.**

Pirmiausia šį ryšį nustatykime negrupuodami klavišų į oktavas, t.y. visoje klaviatūroje klavišų numeracija tegul bus ištisinė. Antroje dalyje šį ryšį nustatysime įvertindami klavišų grupavimą oktavomis.

Pirma dalis

Numeruokime klaviatūros klavišus (baltus ir juodus) didėjimo tvarka iš kairės dešinėn pradėdami nuo bet kurio laisvai pasirinkto klavišo (kad ir juodo). Klavišų numerius žymėkime raide n. Pradiniam kavišui suteikime nulinį eilės numerį (n=0). Sekančio klavišo eilės numeris bus pirmas (n=1), toliau – antras (n=2) ir t.t. iki paskutinio klaviatūros klavišo. Į kairę pusę nuo nulinio klavišo klavišų numeriai eis mažėjimo tvarka ir turės neigiamas reikšmes, t.y. po nulinio klavišo eis klavišas, kurio eilės numeris bus minus 1 (n=-1), toliau – n=-2 ir t.t. iki pirmojo klaviatūros klavišo.

Klavišais išgaunamo garso dažnumą (toliau sutrumpintai – klavišo dažnumą) žymėkime f_n. Tad pradinio (nulinio) klavišo dažnumas bus f_o, sekančio klavišo (pirmo) – f_1 ir t.t. Bendru atveju, klavišu n išgaunamas dažnumas f_n.

Ryšį tarp klaviatūros klavišo eilės numerio ir to klavišo dažnumo nustatysme iš šių pradinių sąlygų – temperuoto muzikinio garsiaeilio savybių [1],[2]:

- oktavoje yra 12 garsų (klavišų),
- oktavos intervalu besiskiriančių garsų dažnumų santykis (didesnio iš mažesnio) lygus 2,
- visų gretimais klavišais išgaunamų garsų dažnumų santykis yra pastovus (vienodas).

Pažymėję šio pastovaus santykio reikšmę raide q, matematiškai užrašytas pradinių sąlygų paskutinis punktas atrodys taip:

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$= q ………………………………………..(1), arba:

$\boldsymbol{f_{n+1} = f_n * q}$ ……………………………………(2)

Iš (2) matome, kad kiekvieno sekančio klavišo dažnumas yra lygus prieš jį esančio klavišo dažnumui, padaugintam iš tam tikro pastovaus daugiklio, kurį pažymėjome raide q. Pagal ką tik suformuluotą teiginį sudarykime klavišais išgaunamų dažnumų matematines išraiškas, pradėdami nuo nulinio klavišo:

$\boldsymbol{f_o}$ – nulinio (laisvai pasirinkto) klavišo dažnumas,

$\boldsymbol{f_1 = f_o * q}$ – sekančio (pirmo) „ „

$f_2 = f_1 * q = f_o * q * q = \boldsymbol{f_o * q^2}$ – antro „ „

$f_3 = f_2 * q = f_o * q^2 * q = \boldsymbol{f_o * q^3}$ –trečio „ „ , ir t.t.

Apibendrinant gautas matematines išraiškas pagal analogiją galime parašyti bet kuriuo klavišu išgaunamo garso dažnumo išraišką f_n:

$\boldsymbol{f_n = f_o * q^n}$ ....(3)

Išraiška (3) yra ne kas kita kaip **geometrinės progresijos** bet kurio nario formulė $b_n = b_1 * q^{n-1}$, kurioje pirmasis progresijos narys yra ne b_1,o f_o. Dėl tokio pakeitimo pasikeitė ir progresijos vardiklio q laipsnio rodiklis – vietoje n-1 tapo lygus n.

Nustatykime kam lygus šis geometrinės progresijos vardiklis arba, kitaip sakant, pastovus daugiklis q anksčiau gautose dažnumų matematinėse išraiškose.

Dvyliktuoju klavišu išgaunamo garso dažnumas:

$f_{12} = f_o * q^{12}$ ....(4)

Šis dažnumas yra dvigubai didesnis už mūsų laisvai pasirinkto nulinio klavišo garso dažnumą f_o (oktavos intervalas):

$f_{12} = f_o * 2$ ....(5)

Sulyginkime išraiškų (4) ir (5) dešiniąsias puses:

$f_o * q^{12} = f_o * 2$, iš kur:

$q^{12} = 2$ ir

$\mathbf{q} = \sqrt[12]{2}$ ………………...………………..(6)

Gautą q reikšmę įstatykime į (2):

$\boldsymbol{f_{n+1} = f_n} * \sqrt[12]{2}$ ……………………….………..(7)

Išraiška (7) rodo, kad garsų dažnumai didėja geometrine progresija.

Išvada 1: Klaviatūros klavišais išgaunamų garsų dažnumai palaipsniui didėja geometrine progresija, kurios vardiklis q = $\sqrt[12]{2}$, t.y. **kiekvienu sekančiu klavišu išgaunamo garso dažnumas yra lygus prieš jį esančio klavišo garso dažnumui padaugintam iš** $\sqrt[12]{2}$ **.**

Ši q = $\sqrt[12]{2}$ reikšmė vadinama **pustoniu**. Lygybę (7) galima vadinti pakėlimo pustoniu matematine išraiška.

Tad **pakelti pustoniu reiškia padidinti dažnumą** $\sqrt[12]{2}$ **karto** ($\sqrt[12]{2}$ = 1,059463…). Šį padidinimą išreiškus procentais, gausime:

$(q-1)*100\% = (\sqrt[12]{2} - 1)*100\% = (1,059463...-1)*100\% = 5,9463...\% \approx 5,95\%$, t.y. **pakelti pustoniu reiškia padidinti garso dažnumą ≈5,95 procento**.

Kaip matome pustonio skaitinė reikšmė q = $\sqrt[12]{2}$ yra iracionalinis skaičius. Tai reiškia, kad jo reikšmė yra apytikslė ir gali būti išreikšta tik tam tikru norimu tikslumu.

Pakelti tonu reiškia 2 kartus paeiliui pakelti pustoniu. Tai bus dažnumo padidinimas

$q * q = \sqrt[12]{2} * \sqrt[12]{2} = \sqrt[6]{2}$ karto ($\sqrt[6]{2}$ =1,12246…), arba

$(q * q - 1) * 100\% = (\sqrt[6]{2} - 1) * 100\% = (1,12246... - 1) * 100\% = 12,246...\% \approx 12,25\%$, t.y. **pakelti tonu reiškia padidinti dažnumą** $\sqrt[6]{2}$ **karto** ($\sqrt[6]{2}$ **=1,12246…) arba ≈12,25 procento**.

Įstatę q reikšmę į (3), turėsime formulę, pagal kurią galėsime paskaičiuoti bet kuriuo klavišu išgaunamo garso dažnumo reikšmę pagal to klavišo eilės numerį n ir nuliniu klavišu išgaunamo garso dažnumą f_o:

$$f_n = f_o * \sqrt[12]{2^n} \quad \text{..............................}(8)$$

Tai ir yra ryšys tarp klaviatūros klavišo eilės numerio n ir tuo klavišu išgaunamo garso dažnumo f_n.

Iš (8) matome, kad visais klavišais išgaunamų dažnumų reikšmės (išskyrus visų oktavų klavišus la) nėra sveikieji skaičiai, o yra iracionalinės ir gali būti išreikštos tik tam tikru norimu tikslumu. Pirmos oktavos klavišu la išgaunamas dažnumas yra 440 Hz [2].Tai etaloninis (atraminis) garsas muzikoje. Nuo jo atskaičiuojami visų kitų garsų dažnumai. Pirmos oktavos garsą la (440 Hz) išduoda ir kamertonas. Fortepijonu klavišais la yra išgaunamos (pradedant nuo žemiausios) 27,5 55 110 220 440 880 1760 3520 Hz dažnumų reikšmės.

Priklausomai nuo to, kurį klavišą klaviatūroje pasirinksime pradiniu (nuliniu), nuo jo į kairę klavišų eil. numeriai bus neigiami. Atitinkamai tokias reikšmes reikės statyti ir į formulę (8).

Pradiniu (nuliniu) klavišu patogiausia rinktis kurios nors oktavos klavišą la, nes šiais klavišais išgaunamų garsų dažnumai yra sveiki skaičiai (išimtis – subkontroktavos la, kuriuo išgaunamo dažnumo reikšmė yra trupmeninė – 27,5 Hz) [1], [2].

Pavyzdys 1.

Paskaičiuokime fortepijonu išgaunamų garsų žemiausią ir aukščiausią dažnumus, t.y. raskime fortepijonu išgaunamų garsų diapazoną.

Žemiausias fortepijonu išgaunamas garsas yra subkontroktavos la, aukščiausias– penktos oktavos do.

Pradiniu (nuliniu) klavišu pasirenkame pirmos oktavos klavišą la, kurio dažnumas yra 440 Hz, t.y. $f_o = 440$ Hz.

Penktos oktavos klavišas do yra 39-tas (n=39), skaičiuojant nuo I-os oktavos klavišo la.

Statome šiuos dydžius į (8):

$$f_n = f_o * \sqrt[12]{2^n}$$

$$f_{39} = 440 * \sqrt[12]{2^{39}} = 440 * \sqrt[12]{2^{36} * 2^3} = 440 * 2^3 * \sqrt[4]{2} = 440 * 8 * 1{,}1892\ldots \approx 4186{,}0 \text{ Hz}$$

Žemiausias garsas – subkontroktavos la klavišas nuo I-os oktavos klavišo la į kairę bus 48-tas (n = - 48):

$f_{-48} = 440 * \sqrt[12]{2^{-48}} = 440/\sqrt[12]{2^{48}} = 440/2^4 = 440/16 = 27{,}5$ Hz, t.y. **fortepijonu išgaunamų garsų diapazonas yra nuo 27,5 Hz iki 4186 Hz.**

Pavyzdys 2.

Paskaičiuokime, kokį dažnumą išduoda mažosios oktavos klavišas do (šios dažnumo reikšmės reikės tolimesniuose skaičiavimuose, kai klavišus grupuosime į oktavas), žinodami kad I-osios oktavos klavišas la išduoda 440 Hz dažnumą.

$f_o = 440$ Hz

Mažosios oktavos klavišas do yra 21-mas į kairę, skaičiuojant nuo I-os oktavos klavišo la, t.y.

n = -21

Statom šiuos dydžius į (8):

$$f_{-21} = 440 * \sqrt[12]{2^{-21}} = 440 / \sqrt[12]{2^{21}} = 440 / 2\sqrt[12]{2^9} = 220 / \sqrt[12]{2^9} = 220 / \sqrt[4]{2^3} = \frac{220 * \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} * \sqrt[4]{2}} =$$

$$=\frac{220\sqrt[4]{2}}{2} = 110\sqrt[4]{2} = 110*1{,}1892... \approx 130{,}81 \text{ Hz}$$

Dabar suformuluokime atvirkščią klausimą:
koks yra klavišo eilės numeris, jei žinomas tuo klavišu išgaunamo garso dažnumas?

Tarkim, žinome kurių nors 2-jų klavišų dažnumus. Vieną iš šių klavišu laikant nuliniu, reikia nustatyti antrojo klavišo eilės numerį.

Tai galime padaryti logaritmuodami lygybę (8) ir iš jos išreiškę klavišo eilės numerį n. Logaritmavimo pagrindą galime pasirinkti bet kokį, tačiau paprasčiausia formulės matematinė išraiška bus tuo atveju, jei logaritmuosime pagrindu 2 (dvejetainis logaritmas):

$$f_n = f_o * \sqrt[12]{2^n}$$

$$\log_2 f_n = \log_2 f_o + \frac{n}{12}\log_2 2$$

$$\log_2 f_n = \log_2 f_o + \frac{n}{12}, \text{ nes } \log_2 2 = 1$$

$$\frac{n}{12} = \log_2 f_n - \log_2 f_o = \log_2 \frac{f_n}{f_o}$$

$$\mathbf{n = 12 * \log_2 \frac{f_n}{f_o}} \quad \text{......................................(9)}$$

Išvada 2: Klavišo eilės numeris n yra lygus to klavišo dažnumo santykio su nulinio klavišo dažnumu dvejetainiam logaritmui, padaugintam iš 12.

Pavyzdys 3.

Pirmos oktavos si bemol klavišu yra išgaunamas $440\sqrt[12]{2}$ =440*1,059463...≈ 466,16 Hz dažnumas. Kokiu klavišu (koks jo eilės numeris) išgaunamas $440\sqrt[3]{4}$ =440*1,5874...≈ 698,46 Hz dažnumas?

Pirmos oktavos si bemol klavišą laikysime nuliniu: $f_o = 440\sqrt[12]{2}$ Hz

Ieškomuoju klavišu išgaunamas dažnumas $f_n = 440\sqrt[3]{4}$ Hz

Statome šiuos dydžius į (9):

$$n = 12*\log_2 \frac{f_n}{f_o} = 12*\log_2 \frac{440\sqrt[3]{4}}{440\sqrt[12]{2}} = 12*\log_2 \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[12]{2}} = 12*\log_2 \frac{\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2}} = 12*\log_2 \sqrt[12]{2^7} =$$

$$= 12*\log_2 2^{\frac{7}{12}} = 12*\frac{7}{12} = 7,$$

t.y. dažnumas $440\sqrt[3]{4} \approx 698{,}46$ Hz išgaunamas 7-uoju klavišu (n=7) į dešinę (n reikšmė teigiama) skaičiuojant nuo nulinio klavišo (pirmos oktavos si bemol). Tai bus antros oktavos klavišas fa.

Antra dalis

Dabar įvertinkime klavišų grupavimą oktavomis.

Numeruokime klaviatūros oktavas didėjimo tvarka iš kairės dešinėn pradėdami nuo bet kurios laisvai pasirinktos oktavos. Oktavas žymėkime raide m. Pradinei oktavai suteikime nulinį eilės numerį (m = 0), sekanti oktava bus pirma (m = 1), toliau antra (m = 2) ir t.t.

Pastaba: Mūsų priimta oktavų numeracija nesutaps su muzikoje nusistovėjusiais oktavų pavadinimais. Šie pavadinimai dalinai sutaps tik tuo atveju, kai mažajai oktavai suteiksime nulinį eilės numerį – tada pirmoji oktava turės eilės numerį 1 (m = 1), antroji – eil. numerį 2 (m = 2), ir t.t. Į kairę nuo mažosios oktavų numeriai bus neigiami: didžioji oktava turės eil. numerį minus 1 (m = -1), kontroktava – eil. nr. minus 2 (m = -2) ir subkontroktava– minus 3 (m = -3).

Klavišų eilės numerius oktavoje žymėkime raide n, pradėdami nuo nulinio (n = 0) klavišo (do). Sekantis – pirmas klavišas (n = 1) bus juodas klavišas do#, toliau – antras (n = 2) klavišas re, ir t.t. iki paskutinio oktavos klavišo si, kurio eil. nr. bus 11 (n = 11). Sekančioje oktavoje klavišų numeracija vėl prasidės nuo nulio (n = 0), o oktavos eilės numeris m padidės vienetu.Tur būt pastebėjote, kad čia, skirtingai nei I-je dalyje, klavišų eilės numeriai yra tik teigiami skaičiai nuo 0 iki 11 – neigiami gali būti tik oktavų numeriai.

Klavišais išgaunamo garso dažnumo reikšmes žymėsime $f_{m,n}$, kur:
m – oktavos eilės numeris,
n – klavišo eilės numeris toje oktavoje (n = 0; 1; 2; ...; 11)

Pvz: $f_{0,0}$ – nulinės oktavos nulinio klavišo (do) išgaunamas dažnumas,
$f_{0,11}$ – nulinės oktavos vienuolikto klavišo (si) išgaunamas dažnumas. Sekantis klavišas jau bus kitos oktavos nulinis klavišas . Juo išgaunamas dažnimas – $f_{1,0}$.

Įvedus aukščiau priimtus žymėjimus bet kuriuo klavišu išgaunamo garso dažnumo formulė (8) dabar atrodys taip:

$$\boldsymbol{f_{m,n} = f_{0,0}} * 2^{m} \sqrt[12]{2^{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

kur: $f_{m,n}$ – m-tosios oktavos n-tojo klavišo toje oktavoje išgaunamo garso dažnumas,
$f_{0,0}$ – nulinės oktavos nulinio klavišo (do) išgaunamo garso dažnumas.

Kaip matote, pradinės (nulinės) oktavos pradinis (nulinis) klavišas visada bus klavišas do. Nuo jo ir atskaičiuosime mums reikiamą klavišą.

Pavyzdys 4.

Paskaičiuokime, kokį dažnumą išduoda pirmos oktavos klavišas la?

Mažajai oktavai suteikime nulinį eilės numerį. Šios oktavos klavišu do išgaunamas dažnumas yra $110\sqrt[4]{2} \approx 130{,}81$ Hz (žiūr. Pavyzdys 2), t.y.:

$$f_{0,0} = 110\sqrt[4]{2}\ \text{Hz}$$

Klavišas la pirmoje oktavoje yra devintas (m =1, n =9) ir šiuo klavišu išgaunamo garso dažnumas bus $f_{1,9}$. Statom šias reikšmes į formulę (10):

$$f_{1,9} = 110\sqrt[4]{2} * 2^{1}\sqrt[12]{2^{9}} = 110\sqrt[12]{2^{3}} * 2\sqrt[12]{2^{9}} = 110*2*2 = 440\ \text{Hz}$$

Dabar panagrinėkime atvirkščią klausimą:

Kaip nustatyti, **kuriai oktavai priklauso klavišas ir koks yra jo eilės numeris toje oktavoje, jei žinomas tuo klavišu išgaunamas dažnumas?**

Tai galime padaryti iš lygybės (10) išreiškus oktavos numerį m ir klavišo eilės numerį n. Tam šiek tiek pertvarkykime formulę (10) ir abi jos puses logaritmuokime pagrindu 2:

$$f_{m,n} = f_{0,0}*2^{m}\sqrt[12]{2^{n}}$$

$$f_{m,n} = f_{0,0}*2^{m}*2^{\frac{n}{12}}$$

$$f_{m,n} = f_{0,0}*2^{m+\frac{n}{12}}$$

$$\log_2 2^{m+\frac{n}{12}} = \log_2\frac{f_{m,n}}{f_{0,0}}$$

$$(m+\frac{n}{12})\log_2 2 = \log_2\frac{f_{m,n}}{f_{0,0}}$$

$$\mathbf{m+\frac{n}{12} = \log_2\frac{f_{m,n}}{f_{0,0}}} \quad \text{..(11)}$$

I (11) matome, kad santykio $f_{m,n}/f_{0,0}$ dvejetainis logaritmas $\mathbf{m+\frac{n}{12}}$ turi sveikąją dalį m ir trupmeninę – $\frac{n}{12}$. Sveikoji dalis (m) vadinama logaritmo charakteristika, o trupmeninė ($\frac{n}{12}$) – mantise.

Išvada 3: Oktavos numeris yra lygus to klavišo dažnumo santykio su nulinio klavišo dažnumu $f_{m,n}/f_{0,0}$ dvejetainio logaritmo charakteristikai m, o klavišo eilės numeris n toje oktavoje – šio logaritmo mantisei, padaugintai iš 12.

Pavyzdys 5.

Klavišu išgaunamas $220\sqrt[12]{2^7} = 220*1{,}4983... \approx 329{,}63$ Hz dažnumas. Kuriai oktavai priklauso šis klavišas ir koks jo eilės numeris toje oktavoje?

Čia, taip pat kaip ir pavyzdyje 4, mažajai oktavai suteikime nulinį eilės numerį; tad $f_{0,0} = 110\sqrt[4]{2}$ Hz,

$f_{m,n} = 220\sqrt[12]{2^7}$ Hz

Statom šias reikšmes į (11):

$$m+\frac{n}{12} = \log_2\frac{f_{m,n}}{f_{0,0}}$$

$$m+\frac{n}{12} = \log_2\frac{220\sqrt[12]{2^7}}{110\sqrt[4]{2}} = \log_2\frac{2\sqrt[12]{2^7}}{\sqrt[12]{2^3}} = \log_2(2\sqrt[12]{2^4}) = \log_2(2\sqrt[3]{2}) = \log_2\sqrt[3]{2^4}$$

Iš čia, pagal logaritmo apibrėžimą, turime:

$2^{m+\frac{n}{12}} = 2^{\frac{4}{3}}$ iš kur:

$$m+\frac{n}{12}=\frac{4}{3}$$

$$m+\frac{n}{12}=1+\frac{1}{3}$$ arba,

$$m+\frac{n}{12}=1+\frac{4}{12}$$, o jau čia matosi, kad m =1, n =4,

t.y. $220\sqrt[12]{2^7} \approx 329{,}63$ Hz dažnumą išduoda I-os oktavos (m =1) ketvirtas klavišas (n = 4).Tai bus I-os oktavos klavišas mi.

Naudota literatūra:

1. Elena Navickaitė – Martinonienė. ***Elementarioji muzikos teorija***, Vilnius „Vaga", 1979.
2. S. Gazarianas. ***Muzikos instrumentų pasaulyje.*** Kaunas „Šviesa", 1988, psl. 91–107.
3. N. Vilenkinas. ***Funkcijos gamtoje ir technikoje***. Kaunas „Šviesa", 1982, psl 100,101.
4. Я. И. Перельман. ***Занимательная алгебра.*** Москва "Наука", 1967, стр. 188–190.

R. Urbonavičius
2007 m.